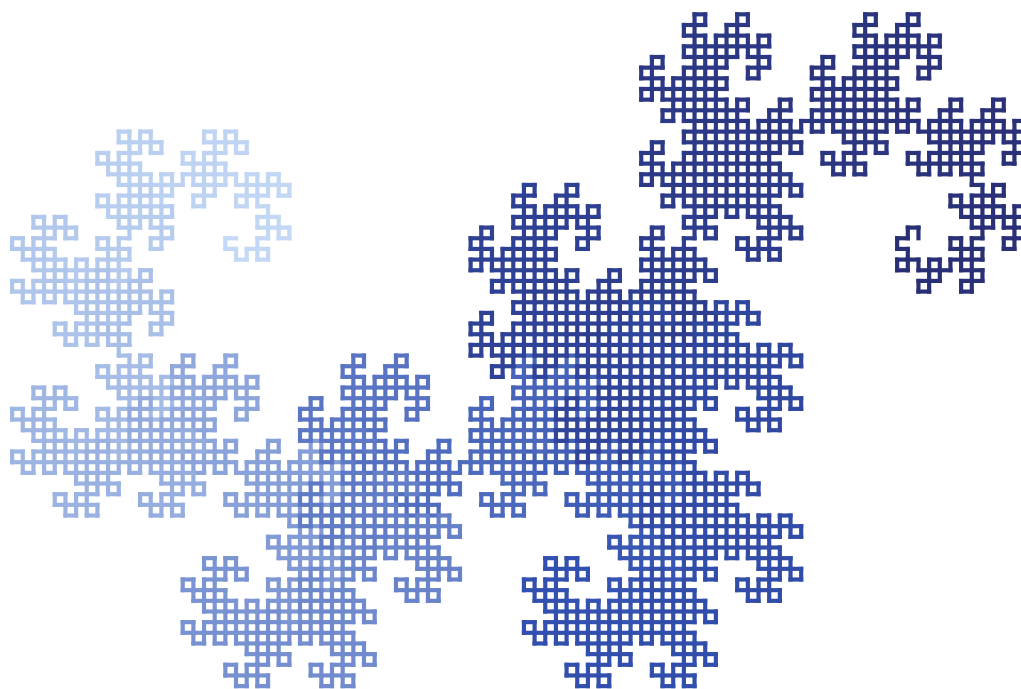


1° DE BACHILLERATO • CIENCIAS Y TECNOLOGÍA

MATEMÁTICAS I

Profesor: **David Lozano Campillo**



Números reales

1.1 Introducción

Conseguir la suficiente habilidad para manejarnos con soltura con los números y las expresiones algebraicas es clave para el desarrollo de las matemáticas en Bachillerato. En este tema revisamos y profundizamos en los conceptos numéricos fundamentales estudiados durante la ESO, desde una perspectiva analítica y rigurosa que servirá de base a lo largo de todo el curso.

1.2 Clasificación y representación de los números reales

1.2.1 Estructura de los conjuntos numéricos

Los distintos conjuntos de números surgieron a lo largo de la historia para responder a necesidades progresivamente más complejas:

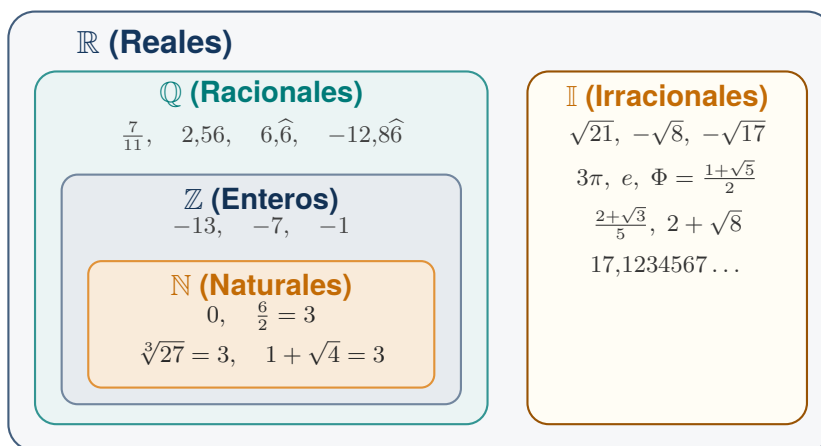
- **Números naturales** ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$): surgen de la necesidad primordial de contar elementos de una colección discreta. Cumplen que la suma y el producto de naturales es siempre un natural.
- **Números enteros** ($\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$): amplían los naturales para permitir la resta sin restricciones, posibilitando expresar deudas, variaciones negativas, temperaturas bajo cero o posiciones respecto a un origen.
- **Números racionales** ($\mathbb{Q} = \{p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$): surgen de la necesidad de medir magnitudes continuas y repartir unidades. Se caracterizan porque su expresión decimal es siempre finita o periódica.
- **Números irracionales** ($\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$): aquellos números que no pueden expresarse como cociente de dos números enteros. Su desarrollo decimal consta de infinitas cifras decimales no periódicas. Se subdividen en:
 - **Irracionales algebraicos**: raíces de polinomios con coeficientes enteros (por ejemplo, raíces no exactas como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{5}$, o expresiones algebraicas como $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$).
 - **Irracionales trascendentes**: números que no son solución de ninguna ecuación algebraica con coeficientes enteros (como el número $\pi \approx 3,14159\dots$, el número $e \approx 2,71828\dots$ o el número áureo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$).

El conjunto de todos los racionales e irracionales conforma el conjunto de los **números reales** ($\mathbb{R}$):

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

🔦 OBSERVACIÓN 1 | *Números no reales: raíces de índice par de cantidades negativas*

Si el radicando de una raíz de índice par es negativo (por ejemplo, $\sqrt{-9}$ o $\sqrt{-16}$), el resultado no pertenece al conjunto de los números reales ($\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$), ya que ningún número real elevado al cuadrado puede ser negativo ($x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Estas raíces dan lugar al cuerpo de los **números complejos** ($\mathbb{C}$), que se estudiarán en un tema posterior.



Números no reales: $\sqrt{-a}$ con $a > 0$ (p. ej. $\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$, pertenece a los números complejos $\mathbb{C}$)

1.2.2 Expresión decimal y fracción generatriz

Todo número racional $\frac{p}{q}$ puede expresarse en forma decimal dividiendo el numerador entre el denominador. Según la estructura de su desarrollo decimal, se clasifican en:

- 1. Decimal exacto:** posee un número finito de cifras decimales. Su denominador sólo contiene potencias de 2 y/o 5. Para obtener su **fracción generatriz**, se escribe en el numerador el número sin coma y en el denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga:

$$2,56 = \frac{256}{100} = \frac{64}{25}$$

- 2. Decimal periódico puro:** las cifras decimales se repiten indefinidamente formando un **período** que comienza inmediatamente después de la coma.

- *Deducción:* Sea $x = 6,\widehat{6} = 6,666\dots$. Multiplicamos por 10 para desplazar exactamente un período:

$$10x = 66,666\dots$$

Restando la primera igualdad ($10x - x$):

$$9x = 60 \implies x = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$$

- *Fórmula general:*

$$N = \frac{\text{número sin coma} - \text{parte entera}}{\underbrace{99\dots9}_{\text{tantos nueves como cifras tiene el período}}}$$

- 3. Decimal periódico mixto:** entre la coma y el período existen cifras que no se repiten, denominadas **anteperíodo**.

- **Deducción:** Sea $x = 12,8\widehat{6} = 12,8666\dots$. Multiplicamos por 100 (desplazando anteperíodo y período) y por 10 (desplazando solo el anteperíodo):

$$100x = 1286,666\dots$$

$$10x = 128,666\dots$$

Restando ambas igualdades:

$$90x = 1286 - 128 = 1158 \implies x = \frac{1158}{90} = \frac{193}{15}$$

Por el contrario, los **números irracionales** poseen infinitas cifras decimales no periódicas (por ejemplo $17,123456\dots$ o $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$). Jamás pueden expresarse como cociente de dos números enteros.

EJEMPLO 1.1 | Clasificación de números reales

Analicemos la pertenencia a los distintos conjuntos de los siguientes valores:

- $\frac{6}{2} = 3 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (fracción reducible a un natural).
- $\sqrt[3]{27} = 3 \in \mathbb{N}$ (raíz cúbica exacta entera).
- $-13 \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (entero negativo).
- $1 + \sqrt{4} = 1 + 2 = 3 \in \mathbb{N}$ (aparenta radical pero es un número natural).
- $\frac{7}{11} = 0,6\widehat{3}$ (decimal periódico puro, pertenece a $\mathbb{Q}$).
- $-\sqrt{8} = -2\sqrt{2} \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ (raíz cuadrada no exacta, irracional algebraico).
- $3\pi \in \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ (múltiplo de un número irracional trascendente).
- $\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$ (raíz cuadrada de número negativo; número complejo $\mathbb{C}$).

1.3 Valor absoluto

1.3.1 Definición e interpretación métrica

DEFINICIÓN | Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real x , denotado por $|x|$, representa su magnitud numérica sin signo y se define formalmente como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Geométricamente, $|x|$ representa la distancia entre el número x y el origen 0 sobre la recta real:

$$d(x, 0) = |x|$$

De forma general, la distancia entre dos números reales cualesquiera a y b viene dada por el valor absoluto de su diferencia:

$$d(a, b) = |a - b| = |b - a|$$

1.3.2 Propiedades del valor absoluto

Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$:

- No negatividad: $|x| \geq 0$, y además $|x| = 0 \iff x = 0$.
- Simetría: $|-x| = |x|$ y $|x|^2 = x^2$.
- Relación con raíces: $\sqrt{x^2} = |x|$ (nótese que $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$).
- Multiplicatividad y cociente: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ y $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ ($y \neq 0$).
- Desigualdad triangular: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

1.3.3 Ecuaciones con valor absoluto

Dada una constante $r > 0$, la condición $|x - c| = r$ establece que la distancia entre un punto variable x y el valor central fijo c es exactamente r . En la recta real, esto determina únicamente los dos puntos situados a distancia r a la izquierda y a la derecha de c :

$$|x - c| = r \iff x - c = r \quad \text{o bien} \quad x - c = -r \iff x = c + r \quad \text{o bien} \quad x = c - r$$

EJEMPLO 1.2 | Resolución de ecuaciones con valor absoluto

Resolver la ecuación $\left|\frac{x^2-1}{2}\right| = 4$:

- Primer caso (positivo):

$$\frac{x^2 - 1}{2} = 4 \iff x^2 - 1 = 8 \iff x^2 = 9 \iff x = \pm 3$$

- Segundo caso (negativo):

$$\frac{x^2 - 1}{2} = -4 \iff x^2 - 1 = -8 \iff x^2 = -7 \quad (\text{sin solución en } \mathbb{R})$$

Las únicas soluciones reales de la ecuación son $x = 3$ y $x = -3$.

1.4 Intervalos, semirrectas y entornos

1.4.1 Notación de conjuntos: pertenencia, extensión y comprensión

Un **conjunto** es una colección de objetos llamados **elementos**. Para expresar si un elemento forma parte de un conjunto o no, utilizamos los símbolos de pertenencia:

- $\in$ (**pertenece a**): indica que el elemento está en el conjunto. Por ejemplo:

$$5 \in \mathbb{N}, \quad -\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

- $\notin$ (**no pertenece a**): indica que no forma parte de él. Por ejemplo:

$$-7 \notin \mathbb{N}, \quad \pi \notin \mathbb{Q}, \quad \sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$$

A la hora de definir un conjunto, distinguimos dos formas básicas:

1. **Por extensión:** se enumeran uno a uno sus elementos entre llaves. Por ejemplo, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ o el conjunto infinito de los pares no negativos $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$.
2. **Por comprensión:** se indica una propiedad común que caracteriza a sus elementos mediante la estructura:

$$\{x \in \text{Conjunto de referencia} \mid \text{condición}\}$$

donde la barra vertical « $\mid$ » (o dos puntos « $:$ ») se lee «**tal que**». Por ejemplo:

- $\{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\}$ representa los enteros entre -2 y 3 , que por extensión sería $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9 = 0\}$ es el conjunto de soluciones reales de la ecuación, es decir, $\{-3, 3\}$.

💡 OBSERVACIÓN 2 | Por qué en $\mathbb{R}$ necesitamos la notación por comprensión

En la recta real no es posible listar los números por extensión, ya que entre dos reales cualesquiera existen infinitos números intermedios. Por ello, para describir tramos continuos de números reales recurrimos a la notación por comprensión, como $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\}$, que da lugar a los **intervalos** que estudiamos a continuación.

1.4.2 Clasificación de intervalos y semirrectas

Los intervalos son subconjuntos continuos de la recta real que corresponden a segmentos acotados o a semirrectas no acotadas.

Convenio fundamental de representación gráfica en la recta real:

- **Extremo abierto** (paréntesis en la notación): el valor frontera **no pertenece** al conjunto. Se representa mediante un **círculo sin rellenar** (hueco, blanco en su interior y con borde nítido, $\circ$).
- **Extremo cerrado** (corchete en la notación): el valor frontera **sí pertenece** al conjunto. Se representa mediante un **círculo rellenado** (punto sólido del color del tramo, $\bullet$).

✎ EJEMPLO 1.3 | Intervalos en la recta real

Intervalo	Desigualdad / Conjunto	Representación gráfica
$(-1, 2)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$	
$(0, 1]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$	
$[-1, 1)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1\}$	
$[0, 2]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\}$	
$(-\infty, 2)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$	
$(-\infty, 0]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$	
$(-1, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$	
$[1, \infty)$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$	

1.4.3 Operaciones con intervalos

Podemos operar con intervalos y semirrectas mediante las tres operaciones fundamentales de la teoría de conjuntos: **unión**, **intersección** y **resta o diferencia**.

DEFINICIÓN | Operaciones fundamentales con intervalos

Sean A y B dos subconjuntos continuos de la recta real $\mathbb{R}$:

- **Unión** ($A \cup B$): conjunto de todos los números reales que pertenecen a A , a B o a ambos a la vez:

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Gráficamente, abarca **todo el tramo continuo** que resulte cubierto al menos por uno de los dos intervalos.

- **Intersección** ($A \cap B$): conjunto de todos los números reales que pertenecen simultáneamente a A y a B :

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Gráficamente, corresponde exclusivamente a la **zona común de solapamiento** (donde coinciden ambos intervalos a la vez). Si no comparten ningún punto, su intersección es el conjunto vacío: $A \cap B = \emptyset$.

- **Resta o diferencia** ($A \setminus B$ o $A - B$): conjunto de números reales que pertenecen a A y **no** pertenecen a B :

$$A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

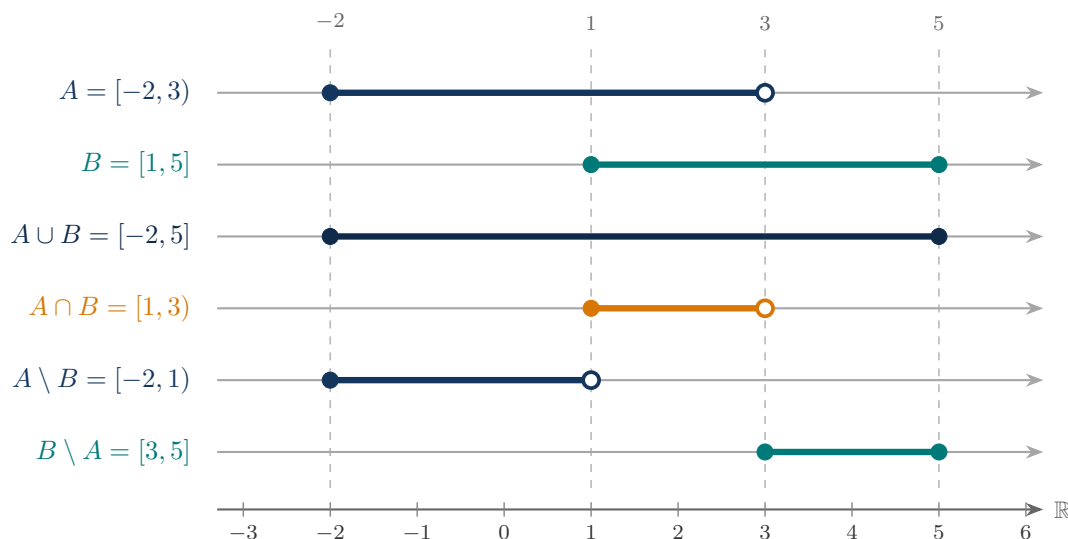
Gráficamente, equivale a tomar el intervalo A y **borrar o recortar** de él toda la parte que coincida con B . Análogamente:

$$B \setminus A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in B \text{ y } x \notin A\}$$

Nota importante: La diferencia no es conmutativa; en general, $A \setminus B \neq B \setminus A$.

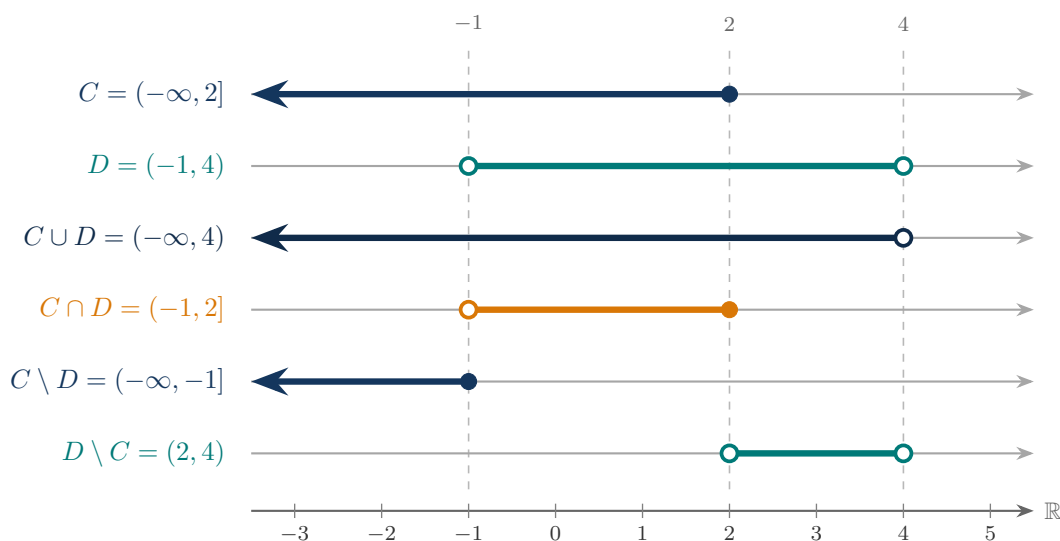
EJEMPLO 1.4 | Operaciones con intervalos acotados: unión, intersección y resta

Sean los intervalos acotados $A = [-2, 3)$ y $B = [1, 5]$. Vamos a hallar gráficamente y analíticamente $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ y $B \setminus A$:



EJEMPLO 1.5 | Operaciones combinando semirrectas e intervalos no acotados

Sean la semirrecta $C = (-\infty, 2]$ y el intervalo acotado $D = (-1, 4)$. Determinemos gráficamente $C \cup D$, $C \cap D$, $C \setminus D$ y $D \setminus C$:

**1.4.4 Entornos y valor absoluto en la recta**

En el análisis matemático y en el estudio de las funciones reales resulta imprescindible describir conjuntos de puntos que se encuentran «próximos» o «alrededor» de un valor de referencia, al que llamamos **centro**, c .

Esta noción geométrica de cercanía en la recta real da lugar al concepto de **entorno**. Un entorno es un tramo simétrico abierto centrado en c , que agrupa a todos los números reales cuya distancia a c es estrictamente menor que una cantidad positiva $d > 0$ (o $r > 0$), denominada **radio** del entorno.

DEFINICIÓN | Entorno de centro c y radio d

Dado un número real c (el **centro**) y un número real positivo $d > 0$ (el **radio**):

- **Entorno abierto:** es el intervalo abierto simétrico respecto de c , denotado por $E_d(c)$ (o también $E(c, d)$):

$$E_d(c) = (c - d, c + d) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - c| < d\}$$

- **Entorno cerrado:** incluye los extremos frontera a distancia exacta d , denotado por $\bar{E}_d(c)$ (o $[c - d, c + d]$):

$$\bar{E}_d(c) = [c - d, c + d] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - c| \leq d\}$$

OBSERVACIÓN 3 | Paso de intervalo abierto a entorno y utilidad del entorno reducido

Todo intervalo abierto acotado (a, b) es, en realidad, un entorno centrado en su **punto medio** y con radio igual a su **semilongitud**:

$$c = \frac{a + b}{2}, \quad d = \frac{b - a}{2} \implies (a, b) = E_d(c)$$

Por ejemplo, el intervalo $(2, 8)$ tiene centro $c = \frac{2+8}{2} = 5$ y radio $d = \frac{8-2}{2} = 3$, luego $(2, 8) = E_3(5)$.

Conexión métrica: relación entre entornos y valor absoluto

Como hemos visto en la sección anterior, en la recta real la distancia geométrica entre cualquier número real x y un punto fijo c viene dada por el valor absoluto de su diferencia:

$$\text{distancia}(x, c) = |x - c|$$

Por ello, la condición que define al entorno abierto $E_d(c)$ («la distancia de x a c es estrictamente menor que el radio d ») se expresa de forma directa mediante la inecuación:

$$|x - c| < d$$

Esta equivalencia algebraica con el intervalo $(c - d, c + d)$ surge de manera directa al interpretar el valor absoluto:

1. Para que la magnitud de la distancia sea estrictamente menor que d , la diferencia $x - c$ no puede superar $+d$ hacia la derecha ni descender de $-d$ hacia la izquierda:

$$-d < x - c < d$$

2. Sumando la constante c a los tres miembros de la desigualdad simultánea:

$$c - d < x < c + d \iff x \in (c - d, c + d)$$

Análogamente, si la condición admite la distancia máxima permitida ($|x - c| \leq d$), se obtienen los extremos cerrados del entorno cerrado $[c - d, c + d]$. Y al exigir $0 < |x - c| < d$, la desigualdad estricta con el cero prohíbe que $x = c$, generando el entorno reducido.

Comportamiento complementario: ¿qué sucede cuando $|x - c| > a$?

Consideremos ahora la situación opuesta: ¿qué ocurre si invertimos el sentido de la desigualdad y planteamos una condición del tipo $|x - c| > a$ (con $a > 0$)?

Desde el punto de vista métrico, la condición $|x - c| > a$ establece que **la distancia entre x y el centro c es estrictamente mayor que a** . Ya no estamos seleccionando los puntos que están cerca de c , sino justamente los puntos **alejados** del centro: aquellos que quedan en el **exterior del entorno cerrado** $\bar{E}_a(c)$.

Para que la distancia entre x y c sea mayor que a , únicamente pueden presentarse dos situaciones excluyentes:

- Que x se sitúe a más de a unidades hacia la **izquierda** de c :

$$x - c < -a \iff x < c - a \iff x \in (-\infty, c - a)$$

- O bien que x se sitúe a más de a unidades hacia la **derecha** de c :

$$x - c > a \iff x > c + a \iff x \in (c + a, +\infty)$$

Dado que un número no puede encontrarse simultáneamente a la izquierda de $c - a$ y a la derecha de $c + a$, ambas posibilidades se combinan mediante la disyunción lógica «o», que en el lenguaje de conjuntos se traduce en una **unión de dos semirrectas disjuntas**:

$$|x - c| > a \iff x < c - a \text{ o bien } x > c + a \iff x \in (-\infty, c - a) \cup (c + a, +\infty)$$

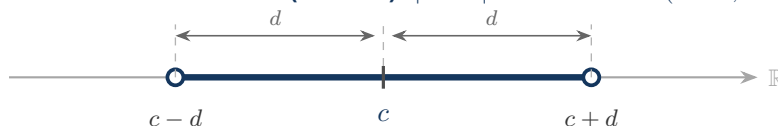
Esta unión coincide exactamente con el **complementario** del entorno cerrado en toda la recta real:

$$(-\infty, c - a) \cup (c + a, +\infty) = \mathbb{R} \setminus [c - a, c + a]$$

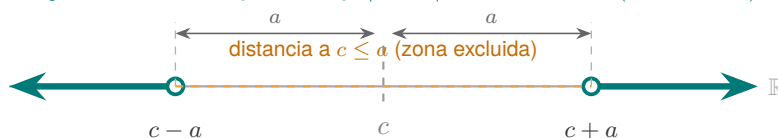
De igual modo, si la desigualdad incluye la igualdad ($|x - c| \geq a$), las semirrectas pasan a ser cerradas:

$$|x - c| \geq a \iff x \leq c - a \text{ o bien } x \geq c + a \iff x \in (-\infty, c - a] \cup [c + a, +\infty) = \mathbb{R} \setminus (c - a, c + a)$$

Proximidad al centro (interior): $|x - c| < d \iff x \in (c - d, c + d) = E_d(c)$



Lejanía al centro (exterior): $|x - c| > a \iff x \in (-\infty, c - a) \cup (c + a, +\infty)$



Cuadro resumen: correspondencia entre valor absoluto, distancias y conjuntos

Proximidad estricta: $|x - c| < d \iff -d < x - c < d \iff x \in (c - d, c + d) = E_d(c)$

Proximidad amplia: $|x - c| \leq d \iff -d \leq x - c \leq d \iff x \in [c - d, c + d] = \bar{E}_d(c)$

Lejanía estricta: $|x - c| > a \iff x < c - a \text{ o } x > c + a \iff x \in (-\infty, c - a) \cup (c + a, \infty)$

Lejanía amplia: $|x - c| \geq a \iff x \leq c - a \text{ o } x \geq c + a \iff x \in (-\infty, c - a] \cup [c + a, \infty)$

EJEMPLO 1.6 | Condiciones con valor absoluto e intervalos

Analicemos diversas situaciones prácticas aplicando las equivalencias métricas:

a) De entorno a intervalo y valor absoluto: El entorno abierto de centro $c = 2$ y radio $d = 5$ se denota por $E_5(2)$. Corresponde al intervalo abierto $(2 - 5, 2 + 5) = (-3, 7)$ y a la condición $|x - 2| < 5$.

b) De intervalo a entorno y valor absoluto: Dado el intervalo $(-1, 7)$, calculamos su centro y radio:

$$c = \frac{-1 + 7}{2} = 3, \quad d = \frac{7 - (-1)}{2} = 4$$

Por tanto, $(-1, 7) = E_4(3)$ y su expresión con valor absoluto es $|x - 3| < 4$.

c) Inecuación de proximidad centrada en el origen:

$$|x| < 6 \iff -6 < x < 6 \iff x \in (-6, 6) = E_6(0)$$

d) Inecuación de lejanía con respecto a un centro:

$$|x - 4| > 3 \iff x - 4 < -3 \text{ o } x - 4 > 3 \iff x < 1 \text{ o } x > 7 \iff x \in (-\infty, 1) \cup (7, \infty)$$

Geométricamente, son los puntos que distan de 4 más de 3 unidades, es decir, $\mathbb{R} \setminus [1, 7]$.

e) Inecuación con centro negativo:

$$|x + 3| \leq 2 \iff |x - (-3)| \leq 2 \iff -2 \leq x + 3 \leq 2 \iff -5 \leq x \leq -1 \iff x \in [-5, -1]$$

Se trata del entorno cerrado $\bar{E}_2(-3)$, centrado en -3 y con radio 2.

f) Inecuación con coeficiente multiplicativo en la variable: Para resolver $|2x - 6| \geq 4$, extraemos factor común para aislar x :

$$|2(x - 3)| \geq 4 \iff 2|x - 3| \geq 4 \iff |x - 3| \geq 2$$

La distancia de x al centro 3 es al menos 2:

$$x - 3 \leq -2 \text{ o } x - 3 \geq 2 \iff x \leq 1 \text{ o } x \geq 5 \iff x \in (-\infty, 1] \cup [5, \infty)$$

1.5 Radicales y potencias de exponente fraccionario

DEFINICIÓN | Radical

Para $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, se llama **raíz n -ésima** de un número real a al número b tal que:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

El número n se denomina **índice**, a es el **radicando** y $\sqrt{}$ es el signo radical.

OBSERVACIÓN 4 | Existencia y unicidad de raíces en $\mathbb{R}$

- Si el índice n es **impar**, existe una única raíz real para cualquier radicando (positivo, negativo o cero): $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$.
- Si el índice n es **par** y el radicando es positivo ($a > 0$), existen dos raíces reales opuestas. Por convenio, el símbolo $\sqrt[n]{a}$ representa únicamente la raíz positiva (raíz aritmética): $\sqrt{9} = 3$.
- Si el índice n es **par** y el radicando es negativo ($a < 0$), no existe ninguna raíz real ($\nexists \sqrt[n]{-4}$ en $\mathbb{R}$).

1.5.1 Forma exponencial de un radical

Toda raíz puede escribirse como una potencia de exponente fraccionario:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

EJEMPLO 1.7 | Forma exponencial

- $\sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$
- $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
- $49^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{49})^3 = 7^3 = 343$
- $9^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{9^{5/2}} = \frac{1}{(\sqrt{9})^5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}$
- $16^{1,5} = 16^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{16})^3 = 4^3 = 64$

1.5.2 Propiedades de los radicales

Gracias a la correspondencia con las potencias, los radicales cumplen las siguientes leyes fundamentales:

- **Radicales equivalentes:** $\sqrt[n]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}^p \quad (p \in \mathbb{N}, p \geq 1)$.
- **Producto de radicales de igual índice:** $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$.
- **Cociente de radicales de igual índice:** $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.
- **Potencia de un radical:** $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$.

- **Raíz de un radical:** $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$.

 EJEMPLO 1.8 | Simplificación y raíz de una raíz

- Simplificación: $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[12:4]{x^{8:4}} = \sqrt[3]{x^2}$.
- Raíz de raíz: $\sqrt[5]{\sqrt{x}} = \sqrt[10]{x}$.
- $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^8}} = \sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$.
- $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^8}}} = \sqrt[8]{x^8} = x \ (x \geq 0)$.

1.5.3 Extracción e introducción de factores

- **Extracción de factores:** Se dividen los exponentes de los factores del radicando entre el índice de la raíz. El cociente sale fuera como exponente, y el resto permanece dentro:

$$x^m = x^{c \cdot n + r} = (x^c)^n \cdot x^r \implies \sqrt[n]{x^m} = x^c \sqrt[n]{x^r}$$

- **Introducción de factores:** Para introducir un factor en un radical se eleva dicho factor al índice de la raíz:

$$a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$$

 EJEMPLO 1.9 | Extracción e introducción de factores

- $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$.
- $\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{3}$.
- $\sqrt{32x^5y^2} = \sqrt{2^5x^5y^2} = 2^2x^2y\sqrt{2x} = 4x^2y\sqrt{2x}$.
- Introducir factores: $2x\sqrt[3]{5x} = \sqrt[3]{(2x)^3 \cdot 5x} = \sqrt[3]{8x^3 \cdot 5x} = \sqrt[3]{40x^4}$.
- $\frac{2}{x}\sqrt[3]{\frac{x}{2}} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{x}\right)^3 \cdot \frac{x}{2}} = \sqrt[3]{\frac{8x}{2x^3}} = \sqrt[3]{\frac{4}{x^2}}$.

1.5.4 Operaciones con radicales

Suma y resta de radicales

Para sumar o restar radicales es imprescindible que sean **semejantes** (mismo índice y mismo radicando). En caso contrario, primero se simplifican o se extraen factores:

 EJEMPLO 1.10 | Suma de radicales semejantes

- $2\sqrt[5]{3} + 4\sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{3} = (2 + 4 - 1)\sqrt[5]{3} = 5\sqrt[5]{3}$.
- $\sqrt{5} - \sqrt{80} = \sqrt{5} - \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{5} - 4\sqrt{5} = -3\sqrt{5}$.
- $\sqrt{50} - \sqrt{18} + \sqrt{8} = \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{4 \cdot 2} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Multiplicación y división con distinto índice

Si los índices son distintos, se reducen previamente a un **común índice** mediante el mínimo común múltiplo (m.c.m.):

EJEMPLO 1.11 | Reducción a común índice y productos notables

- Multiplicar $\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3}$: el m.c.m.(3, 4) = 12. Reduciendo a índice 12:

$$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[12]{(x^2)^4} = \sqrt[12]{x^8}, \quad \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{(x^3)^3} = \sqrt[12]{x^9}$$

$$\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^8 \cdot x^9} = \sqrt[12]{x^{17}} = x \sqrt[12]{x^5}$$

- $(\sqrt{5} - \sqrt{6})(\sqrt{5} + \sqrt{6}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{6})^2 = 5 - 6 = -1$.
- $(2\sqrt{6} - 3)^2 = (2\sqrt{6})^2 - 2 \cdot (2\sqrt{6}) \cdot 3 + 3^2 = 24 - 12\sqrt{6} + 9 = 33 - 12\sqrt{6}$.

1.5.5 Racionalización de denominadores

Racionalizar consiste en transformar una fracción que contiene raíces en el denominador en otra equivalente sin radicales en él. Se distinguen los siguientes casos principales:

Caso 1: denominador con una única raíz cuadrada

Se multiplican numerador y denominador por dicha raíz cuadrada:

$$\frac{A}{\sqrt{b}} = \frac{A \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{A\sqrt{b}}{b}$$

Caso 2: denominador con una raíz de índice cualquiera

Si el denominador es $\sqrt[n]{b^m}$ con $m < n$, se multiplican numerador y denominador por $\sqrt[n]{b^{n-m}}$ para completar la potencia n :

$$\frac{A}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{A \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m} \cdot \sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{A \sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^n}} = \frac{A \sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}$$

Caso 3: denominador con binomio de raíces cuadradas

Se multiplican numerador y denominador por la **expresión conjugada** del denominador $((a+b)(a-b) = a^2 - b^2)$:

$$\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{A(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}$$

Caso 4: denominador con tres sumandos

Cuando el denominador consta de tres términos con radicales, se asocian dos de ellos entre paréntesis para tratarlo como un binomio $((a+b)+c)$:

1. Se multiplica numerador y denominador por el conjugado $((a+b)-c)$.
2. Al desarrollar la diferencia de cuadrados $((a+b)^2 - c^2)$, el número de radicales se reduce a uno solo.
3. Se realiza una segunda racionalización simple para eliminar el radical restante.

Caso 5: denominador con raíces anidadas

Si en el denominador interviene una raíz anidada combinada con otro término (del tipo $\sqrt{a + \sqrt{b}} - c$), multiplicamos por su expresión conjugada para eliminar la raíz exterior. Tras desarrollar el denominador y simplificar, se racionaliza el radical simple restante si es necesario.

EJEMPLO 1.12 | Racionalización básica de expresiones

- $\frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$
- $\frac{3}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2 \cdot 3^3}} = \frac{3\sqrt[5]{27}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{3\sqrt[5]{27}}{3} = \sqrt[5]{27}.$
- $\frac{2}{3+\sqrt{7}} = \frac{2(3-\sqrt{7})}{(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})} = \frac{2(3-\sqrt{7})}{3^2-(\sqrt{7})^2} = \frac{2(3-\sqrt{7})}{9-7} = 3-\sqrt{7}.$
- $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{2-2\sqrt{6}+3}{2-3} = \frac{5-2\sqrt{6}}{-1} = 2\sqrt{6}-5.$

EJEMPLO 1.13 | Racionalización avanzada: tres sumandos y raíces anidadas

- **Denominador con tres sumandos (número y dos raíces):**

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

Agrupamos los dos primeros términos del denominador, $(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}$, y multiplicamos por su conjugado $(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} \frac{2((1+\sqrt{2})+\sqrt{3})}{((1+\sqrt{2})-\sqrt{3})((1+\sqrt{2})+\sqrt{3})} &= \frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+2\sqrt{2}+2)-3} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Racionalizamos ahora la raíz $\sqrt{2}$ restante multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{2}$:

$$\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}{2}$$

- **Denominador con tres raíces cuadradas:**

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

Agrupamos $(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}$ y multiplicamos por el conjugado $(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}$:

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{((\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5})((\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5})} &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+2\sqrt{6}+3-5} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \end{aligned}$$

Multiplicando ahora por $\sqrt{6}$ para eliminar el radical del denominador:

$$\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{2\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}}{2 \cdot 6} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

- **Denominador con raíz anidada y término entero:**

$$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-1}$$

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado exterior, $\sqrt{2 + \sqrt{3}} + 1$:

$$\frac{2(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + 1)}{(\sqrt{2 + \sqrt{3}})^2 - 1^2} = \frac{2(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + 1)}{2 + \sqrt{3} - 1} = \frac{2(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + 1)}{\sqrt{3} + 1}$$

Racionalizamos el nuevo denominador multiplicando por su conjugado ($\sqrt{3} - 1$):

$$\frac{2(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{2(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + 1)(\sqrt{3} - 1)}{3 - 1} = (\sqrt{2 + \sqrt{3}} + 1)(\sqrt{3} - 1)$$

1.6 Logaritmos y sus propiedades

1.6.1 Origen histórico y utilidad de los logaritmos

A comienzos del siglo XVII, la astronomía y la navegación marítima exigían realizar a mano cálculos numéricos descomunales: multiplicar o dividir números con muchas cifras decimales costaba semanas enteras de trabajo agotador y estaba repleto de errores que alteraban observaciones o rumbos.

En 1614, el matemático escocés **John Napier** (Neper) ideó los **logaritmos** basándose en una propiedad clave de las potencias: al multiplicar potencias con la misma base, los exponentes se suman ($a^x \cdot a^y = a^{x+y}$). Napier comprendió que si a cada número se le asignaba su exponente (su logaritmo), las operaciones difíciles se transformaban en operaciones sencillas:

- Las **multiplicaciones** se convertían en simples **sumas**: $\log(A \cdot B) = \log A + \log B$.
- Las **divisiones** pasaban a ser **restas**: $\log(A/B) = \log A - \log B$.
- Las **potencias** se reducían a un producto ordinario: $\log(A^k) = k \cdot \log A$.

Para poner esto en práctica, durante más de 350 años —hasta la llegada de las calculadoras de bolsillo en los años 70— científicos e ingenieros utilizaron libros de **tablas de logaritmos**. Para multiplicar dos números grandes, buscaban sus logaritmos en la tabla, los sumaban con lápiz y papel y comprobaban qué número correspondía a ese resultado. El célebre matemático Pierre-Simon Laplace afirmó que los logaritmos «*habían duplicado la vida de los astrónomos al ahorrarles meses de cálculos*».

¿Para qué sirven los logaritmos hoy en día?

Aunque hoy cualquier calculadora electrónica realiza productos al instante, los logaritmos siguen siendo una herramienta imprescindible por dos razones fundamentales:

1. **Despejar incógnitas en el exponente:** Cuando la incógnita x se encuentra en el exponente (por ejemplo, en el crecimiento de bacterias $N = 2^t$, en la datación arqueológica por carbono-14 o en los intereses bancarios $1,05^t = 2$), la única forma algebraica de «bajarla» y resolver la ecuación es aplicando logaritmos.
2. **Comprimir escalas de medidas gigantescas:** En fenómenos naturales donde las cantidades varían desde valores ínfimos hasta billones, una escala normal no cabe en una gráfica. La escala logarítmica «comprime» esos valores en números manejables:
 - La **escala Richter** en sismología (cada punto más multiplica por 10 el movimiento del suelo).
 - Los **decibelios (dB)** para medir la intensidad del sonido tal y como lo percibe el oído humano.
 - El **pH** en química para medir el nivel de acidez.

1.6.2 Definición y consecuencias inmediatas

DEFINICIÓN | Logaritmo

Dados una base $a > 0$ con $a \neq 1$, y un número real positivo $x > 0$, el **logaritmo en base a de x** es el exponente al que hay que elevar la base a para obtener x :

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

Restricciones matemáticas de la definición:

- El argumento debe ser estrictamente positivo ($x > 0$): Como $a > 0$, cualquier potencia a^y es siempre estrictamente mayor que cero. Por tanto, **no existen logaritmos de números negativos ni del cero** en los reales ($\nexists \log(-100)$ ni $\nexists \log(0)$ en $\mathbb{R}$).
- La base debe ser estrictamente positiva y distinta de uno ($a > 0, a \neq 1$): Si $a = 1$, la función $1^y = 1$ es constante y no permite definir la inversa. Si $a \leq 0$, las potencias fraccionarias generarían discontinuidades y números imaginarios.

Logaritmos especiales:

- **Logaritmo decimal:** base 10, habitualmente denotado omitiendo la base: $\log x = \log_{10} x$.
- **Logaritmo neperiano (o natural):** base el número irracional $e \approx 2,718281828\dots$, denotado como $\ln x = \log_e x$.

Consecuencias inmediatas:

- $\log_a 1 = 0$, puesto que $a^0 = 1$.
- $\log_a a = 1$, puesto que $a^1 = a$.
- $\log_a(a^k) = k$ y $a^{\log_a x} = x$ (la exponenciación y el logaritmo son operaciones inversas).

1.6.3 Cálculo a partir de la definición: tres incógnitas

En la igualdad $\log_a x = y \iff a^y = x$, la incógnita puede presentarse en cualquiera de las tres posiciones:

1. Incógnita en el logaritmo (y): Se escribe el argumento como potencia de la base.

$$\log_3(\sqrt{243}) = y \iff 3^y = \sqrt{3^5} = 3^{\frac{5}{2}} \implies y = \frac{5}{2}$$

$$\log_{1/3} 3 = y \iff \left(\frac{1}{3}\right)^y = 3 \iff 3^{-y} = 3^1 \implies y = -1$$

$$\log_2 0,25 = y \iff 2^y = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 2^{-2} \implies y = -2$$

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = y \iff e^y = e^{-\frac{1}{2}} \implies y = -\frac{1}{2}$$

2. Incógnita en el argumento (x): Se despeja evaluando la potencia directa de la base.

$$\log_7 x = -2 \iff x = 7^{-2} = \frac{1}{49}$$

$$\log_9 x = -\frac{1}{2} \iff x = 9^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\ln\left(\frac{x}{3}\right) = -1 \iff \frac{x}{3} = e^{-1} = \frac{1}{e} \implies x = \frac{3}{e}$$

3. Incógnita en la base (a): Se aísla la base aplicando la raíz o exponente inverso adecuado.

$$\log_x 25 = \frac{1}{2} \iff x^{\frac{1}{2}} = 25 \iff \sqrt{x} = 25 \implies x = 25^2 = 625$$

$$\log_x 125 = 3 \iff x^3 = 125 \implies x = \sqrt[3]{125} = 5$$

$$\log_x\left(\frac{1}{9}\right) = -2 \iff x^{-2} = \frac{1}{9} \iff \frac{1}{x^2} = \frac{1}{9} \iff x^2 = 9 \implies x = 3 \quad (\text{pues } x > 0)$$

 EJEMPLO 1.14 | Cálculos directos según la definición

- $\log_3(3\sqrt{3}) = \log_3(3^1 \cdot 3^{1/2}) = \log_3(3^{3/2}) = \frac{3}{2}$.
- $\log_5(\sqrt[3]{25}) = \log_5(5^{2/3}) = \frac{2}{3}$.
- $\log_{1/2}(\sqrt{8}) = y \iff (2^{-1})^y = (2^3)^{1/2} = 2^{3/2} \implies -y = \frac{3}{2} \implies y = -\frac{3}{2}$.
- $\log_8(0,125) = \log_8\left(\frac{1}{8}\right) = \log_8(8^{-1}) = -1$.
- $\log_3 x = -\frac{1}{4} \iff x = 3^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

1.6.4 Propiedades algebraicas fundamentales

Para cualquier base $a > 0, a \neq 1$ y números reales positivos $u, v > 0$:

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a(u^k) = k \cdot \log_a u$$

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$$

 OBSERVACIÓN 5 | ¡Errores frecuentes a evitar!

Es imprescindible no cometer los siguientes errores típicos de cálculo:

- $\log_a(u + v) \neq \log_a u + \log_a v$ (El logaritmo de una suma **no** es la suma de logaritmos).
- $\frac{\log_a u}{\log_a v} \neq \log_a u - \log_a v$ (El cociente de logaritmos **no** es la resta de logaritmos).
- $(\log_a u)^k \neq k \log_a u$ (El exponente debe afectar al argumento interior, no a toda la expresión).

 EJEMPLO 1.15 | Desarrollo y compresión logarítmica

- **Desarrollar:** $\log\left(\frac{x^3\sqrt{y}}{10z^2}\right) = \log(x^3) + \log(\sqrt{y}) - [\log 10 + \log(z^2)] = 3 \log x + \frac{1}{2} \log y - 1 - 2 \log z$.

- **Comprimir en un único logaritmo:** $E = 2 \log x - \frac{1}{3} \log y + 3 \log z - 1 = \log(x^2) - \log(\sqrt[3]{y}) + \log(z^3) - \log(10) = \log\left(\frac{x^2 \cdot z^3}{10 \sqrt[3]{y}}\right)$.

1.6.5 Fórmula del cambio de base

Permite relacionar logaritmos en cualquier base a partir de logaritmos conocidos (por ejemplo, con base 10 o base e):

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

1.6.6 Cálculo de logaritmos con datos conocidos

Conociendo las aproximaciones de logaritmos de números primos clave, como $\log 2 \approx 0,301$ y $\log 3 \approx 0,477$, podemos calcular el valor de cualquier número compuesto mediante descomposición en factores primos y cambio de base:

EJEMPLO 1.16 | Cálculo con datos conocidos y simplificaciones

Tomando $\log 2 \approx 0,301$ y $\log 3 \approx 0,477$:

- **Cálculo de $\log 5$:** Como $5 = \frac{10}{2}$, aplicamos la propiedad del cociente:

$$\log 5 = \log\left(\frac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,301 = 0,699$$

- **Cálculo de $\log_3 8$:** Aplicando el cambio de base a base decimal:

$$\log_3 8 = \frac{\log 8}{\log 3} = \frac{\log(2^3)}{\log 3} = \frac{3 \log 2}{\log 3} \approx \frac{3 \cdot 0,301}{0,477} = \frac{0,903}{0,477} \approx 1,893$$

- **Cálculo de $\log 60$:**

$$\log 60 = \log(2 \cdot 3 \cdot 10) = \log 2 + \log 3 + \log 10 \approx 0,301 + 0,477 + 1 = 1,778$$

- **Cálculo de $\log \sqrt{0,012}$:**

$$\begin{aligned} \log \sqrt{0,012} &= \frac{1}{2} \log\left(\frac{12}{1000}\right) = \frac{1}{2} [\log(2^2 \cdot 3) - \log 10^3] = \frac{1}{2} [2 \log 2 + \log 3 - 3] \\ &\approx \frac{1}{2} [2(0,301) + 0,477 - 3] = \frac{1}{2} [0,602 + 0,477 - 3] = \frac{-1,921}{2} = -0,9605 \end{aligned}$$

- **Si sabemos que $\log_2 x = 5$, calcular $\log_4 x$ y $\log_{32} x \cdot \log_x 8 \cdot \log_2(x^2)$:**

$$\log_4 x = \log_{2^2} x = \frac{1}{2} \log_2 x = \frac{5}{2}$$

$$\log_{32} x = \log_{2^5} x = \frac{1}{5} \log_2 x = \frac{5}{5} = 1$$

$$\log_x 8 = \log_x(2^3) = 3 \log_x 2 = \frac{3}{\log_2 x} = \frac{3}{5}$$

$$\log_2(x^2) = 2 \log_2 x = 2 \cdot 5 = 10$$

El producto conjunto resulta:

$$\log_{32} x \cdot \log_x 8 \cdot \log_2(x^2) = 1 \cdot \frac{3}{5} \cdot 10 = 6$$

- Considerando $\log 2 \approx 0,301$, $\log 3 \approx 0,477$ y $\log k \approx 0,0778$, calcular $\log_2 \sqrt[3]{6k}$:

$$\begin{aligned}\log_2 \sqrt[3]{6k} &= \frac{\log \sqrt[3]{6k}}{\log 2} = \frac{\frac{1}{3} \log(2 \cdot 3 \cdot k)}{\log 2} = \frac{\frac{1}{3}(\log 2 + \log 3 + \log k)}{\log 2} \\ &\approx \frac{\frac{1}{3}(0,301 + 0,477 + 0,0778)}{0,301} = \frac{\frac{1}{3}(0,8558)}{0,301} = \frac{0,28527}{0,301} \approx 0,9477\end{aligned}$$

1.7 Aplicaciones de los logaritmos

Una de las mayores utilidades prácticas de los logaritmos radica en su capacidad para resolver ecuaciones donde la incógnita se encuentra en el exponente. Esto los convierte en la herramienta indispensable para modelar fenómenos físicos, biológicos y financieros de crecimiento y decaimiento.

1.7.1 Modelos de crecimiento y decrecimiento exponencial

En muchos procesos biológicos (como cultivos bacterianos o propagación de virus) y demográficos, la tasa de variación es proporcional al número de individuos presentes.

DEFINICIÓN | Modelo exponencial general

El tamaño de una población p en función del tiempo transcurrido t sigue la ley:

$$p = p_0 \cdot k^t$$

donde:

- p : población final en el instante t .
- p_0 : población inicial (en el instante $t = 0$).
- t : número de periodos de tiempo transcurridos (días, horas, años...).
- k : constante o factor de crecimiento ($k > 1$ para crecimiento, $0 < k < 1$ para decaimiento).

EJEMPLO 1.17 | Crecimiento de una colonia biológica

Un cultivo de microorganismos cuenta inicialmente con 2000 bacterias y se observa que su número se duplica cada 3 horas.

- a) **Ecuación del modelo:** Tomando el tiempo t en horas, la población responde a:

$$p(t) = 2000 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$$

- b) **Población a las 9 horas:** Para $t = 9$, han transcurrido $9/3 = 3$ periodos de duplicación:

$$p(9) = 2000 \cdot 2^{\frac{9}{3}} = 2000 \cdot 2^3 = 2000 \cdot 8 = 16\,000 \text{ bacterias}$$

- c) **Población tras 14 horas:**

$$p(14) = 2000 \cdot 2^{\frac{14}{3}} = 2000 \cdot 2^{4,667} \approx 2000 \cdot 25,398 = 50\,797 \text{ bacterias}$$

d) **Tiempo necesario para triplicar la población inicial** ($p = 6\,000$):

$$6\,000 = 2\,000 \cdot 2^{\frac{t}{3}} \iff 3 = 2^{\frac{t}{3}}$$

Tomando logaritmos en ambos lados:

$$\log 3 = \log \left(2^{\frac{t}{3}} \right) = \frac{t}{3} \log 2 \implies t = 3 \cdot \frac{\log 3}{\log 2} \approx 3 \cdot \frac{0,4771}{0,3010} \approx 4,755 \text{ horas}$$

Aproximadamente 4 horas y 45 minutos. Observa que el tiempo necesario para triplicarse es independiente del tamaño inicial p_0 .

e) **Tiempo para alcanzar una cota de saturación de 40 000 bacterias:**

$$40\,000 = 2\,000 \cdot 2^{\frac{t}{3}} \iff 20 = 2^{\frac{t}{3}} \implies \frac{t}{3} = \frac{\log 20}{\log 2} \implies t = 3 \cdot \frac{\log 20}{\log 2} \approx 3 \cdot \frac{1,3010}{0,3010} \approx 12,97 \text{ horas}$$

1.7.2 Interés compuesto y capitalización periódica

Cuando un capital monetario se deposita en una entidad financiera, genera un beneficio denominado interés. En el **interés compuesto**, los intereses producidos al final de cada periodo pactado no se retiran, sino que se suman al capital inicial para generar nuevos intereses en los periodos siguientes (el interés produce interés).

■ DEFINICIÓN | Fórmula del interés compuesto

Si se invierte un capital inicial C_0 a un rédito o tasa nominal anual del $r\%$ durante t años, con n periodos de capitalización al año, el capital final acumulado C viene dado por:

$$C = C_0 \left(1 + \frac{r}{100 \cdot n} \right)^{n \cdot t}$$

donde:

- C : capital final acumulado.
- C_0 : capital inicial invertido.
- r : rédito anual en tanto por ciento (tasa de interés anual).
- t : tiempo total de la operación en años.
- n : número de periodos de liquidación en un año:
 - Capitalización anual: $n = 1$.
 - Capitalización semestral: $n = 2$.
 - Capitalización trimestral: $n = 4$.
 - Capitalización mensual: $n = 12$.
 - Capitalización diaria: $n = 365$.

Despeje del tiempo de inversión mediante logaritmos: Si se desea calcular cuántos años t deben

transcurrir para que un capital C_0 crezca hasta alcanzar un capital fijado C :

$$\frac{C}{C_0} = \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{nt} \Rightarrow \log\left(\frac{C}{C_0}\right) = nt \cdot \log\left(1 + \frac{r}{100n}\right)$$

$$t = \frac{\log(C/C_0)}{n \cdot \log\left(1 + \frac{r}{100n}\right)} = \frac{\log C - \log C_0}{n \cdot \log\left(1 + \frac{r}{100n}\right)}$$

EJEMPLO 1.18 | Inversión a interés compuesto

Se depositan 3 000 € en una cuenta bancaria a un tipo de interés nominal del 4 % anual durante 5 años.

a) **Capital acumulado con capitalización anual ($n = 1$):**

$$C = 3\,000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100 \cdot 1}\right)^{1 \cdot 5} = 3\,000 \cdot (1,04)^5 \approx 3\,000 \cdot 1,21665 = 3\,649,96 \text{ €}$$

b) **Capital acumulado con capitalización mensual ($n = 12$):**

$$C = 3\,000 \cdot \left(1 + \frac{4}{1\,200}\right)^{12 \cdot 5} = 3\,000 \cdot \left(1 + \frac{1}{300}\right)^{60} \approx 3\,000 \cdot 1,220997 = 3\,662,99 \text{ €}$$

Observa que al capitalizar con mayor frecuencia, el rendimiento final obtenido es ligeramente superior.

c) **Tiempo para alcanzar 5 000 € con capitalización trimestral ($n = 4$):**

$$5\,000 = 3\,000 \cdot \left(1 + \frac{4}{400}\right)^{4t} \iff \frac{5}{3} = (1,01)^{4t}$$

Tomando logaritmos:

$$\log(5/3) = 4t \cdot \log(1,01) \Rightarrow t = \frac{\log(5/3)}{4 \cdot \log(1,01)} \approx \frac{0,22185}{4 \cdot 0,004321} \approx \frac{0,22185}{0,017286} \approx 12,83 \text{ años}$$

Deberán transcurrir aproximadamente 12 años y 10 meses.

1.8 Aproximaciones, errores y notación científica

1.8.1 Aproximaciones numéricas

Al trabajar en ciencias e ingeniería con números irracionales o con muchos decimales es necesario truncar o redondear:

- **Truncamiento:** se suprimen todas las cifras a partir de un orden decimal fijado.
- **Redondeo:** si la primera cifra suprimida es mayor o igual que 5, se incrementa en una unidad la última cifra conservada; si es menor que 5, se mantiene inalterada.

1.8.2 Error absoluto y error relativo

DEFINICIÓN | Errores

Sea x el valor exacto y $\bar{x}$ una aproximación:

- **Error absoluto (E_a):** diferencia absoluta entre el valor real y el aproximado:

$$E_a = |x - \bar{x}|$$

Si no se conoce el valor exacto, se utiliza una **cota de error absoluto** ε , de modo que $E_a \leq \varepsilon$. Al redondear a un determinado orden de unidad u , la cota es $\varepsilon = \frac{1}{2}u$.

- **Error relativo (ε_r):** cociente entre el error absoluto y el valor real:

$$\varepsilon_r = \frac{E_a}{|x|} \approx \frac{E_a}{|\bar{x}|}$$

Multiplicado por 100 proporciona el **error porcentual**: Error % = $\varepsilon_r \cdot 100$ %.

1.8.3 Notación científica

Un número en notación científica se expresa como:

$$a \cdot 10^k \quad \text{donde } 1 \leq |a| < 10 \text{ y } k \in \mathbb{Z}$$

donde a es la mantisa y k el orden de magnitud. Todas las cifras de a son **cifras significativas**.

EJEMPLO 1.19 | Cálculo de errores

Aproximamos $\pi \approx 3,14$:

- $E_a = |\pi - 3,14| \approx |3,14159265 - 3,14| = 0,00159265 \dots < 0,005$.
- $\varepsilon_r = \frac{0,00159265}{\pi} \approx 0,000507 = 0,0507$ %.

1.9 Ejercicios propuestos

1. Expresa en forma de intervalo o semirrecta los siguientes conjuntos y represéntalos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 3\}$

[Sol: $A = [-2, 3)$]

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$

[Sol: $B = [3, \infty)$]

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 4\}$

[Sol: $C = [-1, 4]$]

2. Dados los conjuntos del ejercicio anterior, efectúa las siguientes operaciones:

a) $A \cup B$

[Sol: $[-2, \infty)$]

b) $A \cup C$

[Sol: $[-2, 4]$]

c) $A \cap B$

[Sol: $\emptyset$]

d) $A \cap C$

[Sol: $[-1, 3)$]

e) $B \cup C$

[Sol: $[-1, \infty)$]

f) $B \cap C$

[Sol: $[3, 4]$]

3. Escribe en forma de conjunto (desigualdad) los siguientes intervalos:

- a) $[3, 7)$ [Sol: $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 7\}$]
 b) $(-\infty, -2)$ [Sol: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$]
 c) $(-3, 4)$ [Sol: $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\}$]
 d) $[1, \infty)$ [Sol: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$]

4. Representa gráficamente y expresa en forma de intervalo el conjunto de números que cumplen:

- a) $|x - 3| < 5$ [Sol: $(-2, 8)$]
 b) $|x - 3| \geq 5$ [Sol: $(-\infty, -2] \cup [8, \infty)$]
 c) $|x - 4| \leq 1$ [Sol: $[3, 5]$]
 d) $|2x - 3| > 5$ [Sol: $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$]

5. Sin calculadora, calcula:

- a) $49^{\frac{3}{2}}$ [Sol: 343]
 b) $9^{-\frac{5}{2}}$ [Sol: $\frac{1}{243}$]
 c) $4^{-0,5}$ [Sol: $\frac{1}{2}$]
 d) $16^{1,5}$ [Sol: 64]

6. Calcula las siguientes potencias y simplifica el resultado:

- a) $(2\sqrt{6} - 3)^2$ [Sol: $33 - 12\sqrt{6}$]
 b) $(5 + 3\sqrt{2})^2$ [Sol: $43 + 30\sqrt{2}$]

7. Efectúa las siguientes operaciones con radicales:

- a) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ [Sol: -1]
 b) $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(2\sqrt{2} + \sqrt{3})$ [Sol: $1 - \sqrt{6}$]
 c) $(3\sqrt{5} - \sqrt{2})(5\sqrt{2} - 2\sqrt{5})$ [Sol: $-40 + 17\sqrt{10}$]

8. Efectúa las siguientes sumas y restas de radicales extrayendo factores:

- a) $\sqrt{8} - 3\sqrt{50} + 5\sqrt{98} + \sqrt{200}$ [Sol: $32\sqrt{2}$]
 b) $\sqrt{27} + \sqrt{12} - 3\sqrt{75} - 4\sqrt{3}$ [Sol: $-14\sqrt{3}$]
 c) $2\sqrt{50} - 3\sqrt{40} - 5\sqrt{90} - 4\sqrt{128} - \sqrt{160}$ [Sol: $-22\sqrt{2} - 25\sqrt{10}$]
 d) $\frac{\sqrt{50}}{5} - \frac{\sqrt{18}}{3} + \frac{\sqrt{72}}{4}$ [Sol: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$]
 e) $\sqrt{50} - \frac{\sqrt{18}}{3} + \frac{\sqrt{32}}{5} - \sqrt{72} + \sqrt{2}$ [Sol: $-\frac{\sqrt{2}}{5}$]

9. Racionaliza los denominadores monómicos:

- a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ [Sol: $\frac{\sqrt{5}}{5}$]
 b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ [Sol: $\frac{\sqrt{10}}{5}$]
 c) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ [Sol: $\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$]
 d) $\frac{1}{\sqrt[5]{5^3}}$ [Sol: $\frac{\sqrt[5]{25}}{5}$]
 e) $\frac{3}{\sqrt[5]{3^2}}$ [Sol: $\sqrt[5]{27}$]
 f) $\frac{2}{\sqrt[4]{2^3}}$ [Sol: $\sqrt[4]{2}$]
 g) $\frac{ab}{\sqrt[6]{a^4b^3}}$ [Sol: $\sqrt[6]{a^4b^3}$]
 h) $\frac{3a}{\sqrt{a}}$ [Sol: $3\sqrt{a}$]

10. Racionaliza denominadores con binomios multiplicando por el conjugado:

- a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ [Sol: $\sqrt{2} - 1$]
 b) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-3}$ [Sol: $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$]
 c) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ [Sol: $2\sqrt{6} - 5$]
 d) $\frac{5}{\sqrt{10}-\sqrt{5}}$ [Sol: $\sqrt{10} + \sqrt{5}$]

11. Efectúa y simplifica expresando los radicales como potencias fraccionarias:

- a) $\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{x-2}}$ [Sol: $x^2\sqrt{x}$]
 b) $\frac{a^{2/3} \cdot a^{6/4}}{a^{-1/2} \cdot a^{5/3}}$ [Sol: a]
 c) $\frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}}{a\sqrt{a}}$ [Sol: $a^{-7/4}$]
 d) $16^{1/4} \cdot \sqrt[3]{1/4} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{4}}$ [Sol: 1]

12. Efectúa y simplifica:

- a) $\frac{1}{5+\sqrt{3}} + \frac{2}{5-\sqrt{3}}$ [Sol: $\frac{15+\sqrt{3}}{22}$]
 b) $\frac{7}{4+\sqrt{2}} - \frac{6}{4-\sqrt{2}}$ [Sol: $\frac{4-13\sqrt{2}}{14}$]

13. Racionaliza, calcula y simplifica:

- a) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ [Sol: $\sqrt{5}$]
 b) $\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ [Sol: -4]

14. Aplicando la definición de logaritmo, calcula sin calculadora:

- a) $\log_4 64$ [Sol: 3]
 b) $\log_{25} 5$ [Sol: $1/2$]
 c) $\log_{1/2} 2$ [Sol: -1]
 d) $\log 0,01$ [Sol: -2]
 e) $\log 0,0001$ [Sol: -4]
 f) $\log 10^{-6}$ [Sol: -6]

15. Calcula el valor de la incógnita x en cada igualdad:

- a) $3x^3 = 375$ [Sol: $x = 5$]
 b) $8^{2x} = 45$ [Sol: $x = \frac{\log_8 45}{2}$]
 c) $125 = x^2$ [Sol: $x = \pm 5\sqrt{5}$]
 d) $x^6 = 64$ [Sol: $x = \pm 2$]
 e) $3^{2x} = 6561$ [Sol: $x = 4$]
 f) $\log_{200} x = 5$ [Sol: $x = 3,2 \cdot 10^{11}$]
 g) $\log_x 1024 = 10$ [Sol: $x = 2$]
 h) $\ln 3x = 3$ [Sol: $x = \frac{e^3}{3}$]
 i) $5^{2x} = 625$ [Sol: $x = 2$]
 j) $3 + \log(x + 1000) = 7$ [Sol: $x = 9000$]
 k) $2^{x^2+1} = 32$ [Sol: $x = \pm 2$]

l) $4\log_2(2x+1) = 16$

[Sol: $x = 15/2$]

16. Calcula sin usar calculadora:

a) $\log_4 \frac{1}{16}$

[Sol: -2]

b) $\log_5 \sqrt[3]{25}$

[Sol: $2/3$]

c) $\log \frac{1}{\sqrt{10}}$

[Sol: $-1/2$]

d) $\log_4 \frac{1}{2}$

[Sol: $-1/2$]

e) $\log_9 \frac{1}{3}$

[Sol: $-1/2$]

f) $\log_{0,001} 0,1$

[Sol: $1/3$]

17. Deduce la relación de conversión entre el logaritmo decimal y el natural:

$$\log 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10} \quad \text{o bien} \quad \ln 2 = \frac{\log 2}{\log e}$$

18. Despeja S utilizando las propiedades de los logaritmos:

a) $\log S = 2\log x - 4\log y$

[Sol: $S = \frac{x^2}{y^4}$]

b) $\ln S = 5\ln(x+2)$

[Sol: $S = (x+2)^5$]

c) $\ln S = 5\ln x + 2$

[Sol: $S = e^2 x^5$]

d) $\log S = 3\log 2 - 2\log 3 + \log x$

[Sol: $S = \frac{8x}{9}$]

19. Simplifica las siguientes expresiones logarítmicas aplicando propiedades:

a) $\log_x \sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}\log_x x^2 + \log_x \sqrt[4]{x^2} - \log_x \sqrt{x^5}$

[Sol: $-7/3$]

b) $\log_x \sqrt{x^3} + \log_x x^5 - \log_x x^2$

[Sol: $9/2$]

20. Utiliza las propiedades de los logaritmos para simplificar y obtener el valor numérico exacto:

a) $3\log_{90} 15 - 2\log_{90} 10 + 2\log_{90} 12 - 3\log_{90} 3 - \log_{90} 2$

[Sol: 1]

b) $2\log_6 30 - \log_6 2 - 2\log_6 5 + 2\log_6 6 - \log_6 3$

[Sol: 3]

21. Calcula el valor de la base x que cumple la igualdad:

$$2\log_x 5 + 3\log_x 2 + 4\log_x 3 - 2\log_x 6 - \log_x 15 = 1$$

[Sol: $x = 30$]

22. Determina el error absoluto y relativo cometido al aproximar la fracción $\frac{23}{7}$ mediante el número decimal 3,29.

[Sol: $E_a \approx 0,0043$; $\varepsilon_r \approx 0,13\%$]

1.10 Retos matemáticos

Los siguientes problemas plantean situaciones de mayor profundidad e ingenio matemático, conectando conceptos del tema con métodos de demostración y modelización. Intenta resolverlos por ti mismo aplicando tu ingenio y las propiedades estudiadas.

☰ Actividad 1 | La raíz del problema es...

Alicia ha estado explorando sumas con fracciones en las que hay raíces cuadradas. De manera experimental, usó una hoja de cálculo para hacer columnas para raíces cuadradas, y luego sumó varias combinaciones.

Aquí tienes una de las sumas que calculó:

$$S = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

¡El resultado le ha sorprendido por completo! ¿Puedes ingeníartelas para deducir cuánto vale exactamente la suma sin utilizar calculadora ni hoja de cálculo?

☰ Actividad 2 | ¿Cuántos logaritmos hacen...?

Observa el siguiente patrón numérico:

$$\begin{aligned}\log_3 3 &= 1 \\ \log_9 3 + \log_9 3 &= 1 \\ \log_{27} 3 + \cdots + \log_{27} 3 &= 1\end{aligned}$$

- ¿Cuántos sumandos $\log_{27} 3$ se necesitan para obtener 1?
- ¿Cuántos sumandos $\log_{81} 3$ necesitas sumar para obtener 1?
- Generaliza el resultado: si la base es 3^k , ¿cuántos términos $\log_{3^k} 3$ hacen falta para sumar 1?

☰ Actividad 3 | Retículo de logaritmos

¿Puedes distribuir una selección de los siguientes 12 logaritmos para completar las dos tablas siguientes sin utilizar calculadora?

$$\log_3 2, \log_4 5, \log_2 5, \log_3 4, \log_3 5, \log_5 3,$$

$$\log_2 3, \log_5 2, \log_5 4, \log_4 3, \log_4 2, \log_2 4$$

Las filas deben aumentar de izquierda a derecha ($\rightarrow$) y las columnas de arriba a abajo ($\downarrow$).

Cuadrícula 1:

	Mayor tamaño $\rightarrow$		
Mayor tamaño $\downarrow$		1	

Preguntas de ayuda:

- ¿Puedes ordenar parejas de la lista? Recuerda que si la base es mayor que 1, al aumentar el argumento el logaritmo crece ($\log_2 3 < \log_2 4 < \log_2 5$).
- Si el argumento es fijo, ¿qué base da mayor valor? Una base menor crece más despacio, luego necesita mayor potencia: $\log_5 3 < \log_4 3 < \log_2 3$.
- ¿Cuáles son mayores que 1 y cuáles menores que 1? $\log_a b > 1 \iff b > a$.

Cuadrícula 2: Usa los mismos logaritmos para completar esta cuadrícula:

	Mayor tamaño $\rightarrow$		
	$\log_4 2$		
Mayor tamaño $\downarrow$			

☰ Actividad 4 | Alineando logaritmos

¿Puedes, sin usar calculadora, ordenar los siguientes logaritmos de menor a mayor? Lo realizado en la actividad anterior te habrá hecho parte del trabajo:

$$\log_4 5, \log_2 5, \log_3 4, \log_3 3, \log_3 5, \log_2 4, \log_2 3$$

Actividad 5 | Gigantes

- a) ¿Cuál de los dos siguientes números es mayor: 9^{10} o 10^9 ? Razona la respuesta sin calculadora.
- b) Ahora, ingéniate las para comparar 99^{100} y 100^{99} . ¿Cuál es mayor y en qué proporción aproximada?

Cuestiones que te pueden ayudar:

- ¿Qué ocurre si tomas logaritmos decimales a ambos números?
- Considera el cociente $\frac{99^{100}}{100^{99}} = 99 \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^{99}$. ¿Cómo se relaciona esto con el número e ?
- ¿Qué ocurre si elevas $99^{1/99}$ y $100^{1/100}$ a la potencia 9900?

Actividad 6 | ¿Cuánto se movió la Tierra?

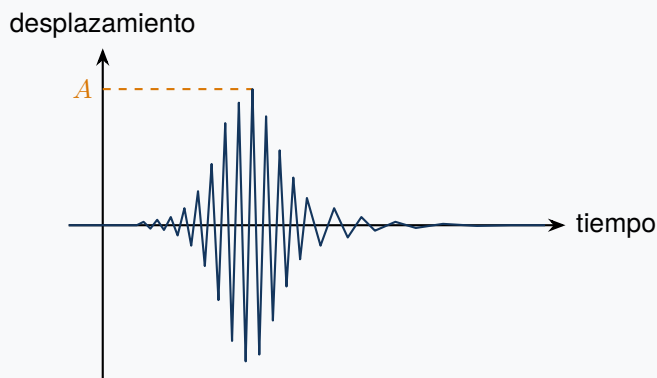
La severidad de un terremoto se mide mediante su magnitud local, M_L , que normalmente se sitúa en la llamada **escala de Richter**. Por ejemplo, el terremoto de Lorca de 2011 tuvo una magnitud de 5,1.

La magnitud se define matemáticamente mediante la siguiente expresión logarítmica:

$$M_L = \log_{10} \left(\frac{A}{A_0} \right)$$

donde A es la amplitud máxima del desplazamiento de la superficie de la Tierra registrado a 100 km del epicentro mediante un sismógrafo, y A_0 es una constante de desplazamiento de referencia estándar establecida por Charles Richter en 1935:

$$A_0 = 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$$



¿Cuál es la magnitud en la escala de Richter de un sismo que causa un desplazamiento A igual a:

- a) $1,0 \mu\text{m}$?
- b) $1,0 \text{ cm}$?
- c) 30 cm ?